

## ANÁLISE DE TENSÕES EM TUBOS ENGASTADOS SUJEITOS A VIBRAÇÕES FORÇADAS VIA ELEMENTOS FINITOS

**Carlos Filipe Cardoso Bandeira, fillypebandeira@hotmail.com**

Programa de Engenharia Mecânica, CEFET/RJ - Av. Maracanã, 229 - Maracanã - RJ - CEP 20271-110 – Brasil

**Fernando Ribeiro da Silva, D. Sc., d4fernan@gmail.com**

Departamento de Engenharia Mecânica, CEFET/RJ - Av. Maracanã, 229 - Maracanã - RJ - CEP 20271-110 – Brasil

**RESUMO:** Todo projeto mecânico deve prever os tipos de carregamento que irão atuar sobre a estrutura que está sendo projetada, que podem ser estáticos ou dinâmicos. Os dinâmicos são caracterizados por serem variáveis ao longo do tempo. Uma de suas grandes causas está relacionada com o fenômeno vibratório, que é muito comum em sistemas mecânicos. As vibrações forçadas produzem um estado de tensão variável ao longo do tempo, podendo gerar uma falha por fadiga dos componentes. Portanto, é de fundamental importância entender como a vibração forçada afeta o estado de tensão de um dado componente, de tal forma que se possa projetar uma estrutura capaz de resistir aos esforços dinâmicos. O presente trabalho propõe avaliar esses efeitos em um elemento estrutural tubular metálico, de seção circular.

**PALAVRAS-CHAVE:** vibrações forçadas, elementos finitos, análise de tensões

**ABSTRACT:** Every mechanical project should provide the types of loading that will act on the structure being designed, which can be static or dynamic. The Dynamic loadings are characterized to be variable over time. One of its major causes is related to the vibratory phenomenon, which is very common in mechanical systems. The forced vibrations generate a variable state of stress over time, may a fatigue failure of the components. Therefore, it is essential to understand how the forced vibration affects the state of stress of a component, so that one can design a structure able of withstanding the dynamic loading. This study proposes to evaluate these effects in a metallic tubular structural element, of circular cross section.

**KEYWORDS:** forced vibrations, finite elements, stresses analysis

### INTRODUÇÃO

Elementos estruturais são encontrados em todas as máquinas e equipamentos utilizados na indústria mecânica e são responsáveis por resistir às cargas de serviço e ao próprio peso da estrutura. Os tubos metálicos estão sendo cada vez mais utilizados na indústria mecânica e na construção civil, pois são elementos com baixo peso próprio, capazes de resistir a esforços de tração, compressão, torção, flexão e, pressão interna e externa (Meriam and Kraige, 2009).

O fenômeno vibratório está presente em todo sistema mecânico em movimento, quer seja de forma natural, quer seja forçada. As análises dinâmicas de um componente desse sistema são de fundamental importância para seu projeto. Frequências naturais, modos normais, deslocamentos, deformações e tensões são dados importantes obtidos nessas análises, pois determinam a resposta dinâmica desse componente frente à sua vibração, tornando possível seu correto dimensionamento contra a falha, principalmente por fadiga.

Um sistema vibratório pode ser considerado como sendo discreto, quando os corpos possuem massas concentradas, ou contínuo, quando possuem propriedades distribuídas. Barras, vigas, eixos, colunas, chapas e tubos longos, por exemplo, são considerados elementos contínuos, uma vez que possuem

propriedades físicas distribuídas ao longo dos volumes que ocupam (Rao, 2008).

O estudo analítico de vibrações em elementos contínuos requer uma matemática complexa. Equações diferenciais parciais de segunda e quarta ordens são encontradas no desenvolvimento teórico das equações de movimento, como mostra a Eq. (1) para o caso de vibração transversal forçada de vigas.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1)$$

Dessa forma, torna-se necessário utilizar outros métodos para a solução de um problema vibratório em elementos contínuos, dado que a análise fica cada vez mais complexa quanto mais elementos estão presentes no sistema. Elementos finitos, diferenças finitas e elementos de contorno, são alguns desses métodos (Kelly, 2012).

O método dos elementos finitos é comumente utilizado para dar soluções aproximadas, tanto no campo da estática quanto no da dinâmica. Basicamente, ele permite que um sistema contínuo seja representado de forma discreta, dividindo-o em vários elementos e, a partir das equações de equilíbrio e de compatibilidade do sistema, calcula os deslocamentos de cada nó para cada grau de liberdade.

## METODOLOGIA

O presente estudo tem como principal objetivo avaliar o efeito da vibração forçada sobre o estado de tensão de um elemento estrutural tubular. Ele está dividido em três partes, sendo elas: estudo de vibração livre, estudo de vibração forçada e análise de tensões. Em todas as etapas o software MATLAB<sup>R</sup> foi utilizado como a ferramenta matemática de programação para resolver as equações matriciais, traçar gráficos, fornecer dados, entre outros.

## Modelo

O modelo considera um tubo longo de aço estrutural ASTM A-36, de comprimento  $L$ , diâmetro externo  $D_{ext}$  e espessura  $t$ , engastado em uma de suas extremidades, conforme mostra a Fig. (1) e Tab. 1.

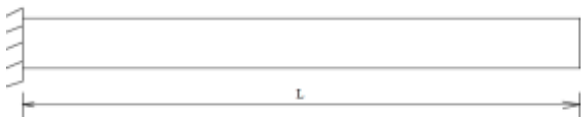


Figura 1. Esquema do tubo engastado

Tabela 1. Propriedades do tubo

Geométricas (mm)		Físicas	
$L$	1200	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7800
$l$	400	$E$ (GPa)	207
$t$	1	$G$ (GPa)	70
$D_{ext}$	100	$S_y$ (MPa)	250

O modelo de elementos finitos do tubo considera três elementos e quatro nós. Os graus de liberdade transversais ( $W_1, W_2, W_5, W_6, W_9, W_{10}, W_{13}$  e  $W_{14}$ ), axiais ( $W_3, W_7, W_{11}$  e  $W_{15}$ ) e angulares ( $W_4, W_8, W_{12}$  e  $W_{16}$ ), são considerados para cada nó, como mostra a Fig. (2).

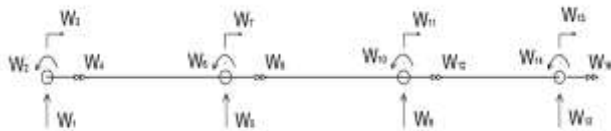


Figura 2. Graus de liberdade dos nós

Além disso, considerou-se que os forçamentos externos transversal  $Q = Q_0 \sin(\omega_{ff} t)$ , axial  $F = F_0 \sin(\omega_{fa} t)$  e torção  $T = T_0 \sin(\omega_{ft} t)$ , atuam ao mesmo tempo em uma das extremidades do tubo, 4º nó, onde:  $Q_0 = -1000 \text{ N}$ ,  $\omega_{ff} = 200 \text{ rad/s}$ ,  $F_0 = 10 \text{ kN}$ ,  $\omega_{fa} = 200 \text{ rad/s}$ ,  $T_0 = 750 \text{ N.m}$  e  $\omega_{ft} = 200 \text{ rad/s}$ . Além disso, considerou-se que os forçamentos são desacoplados, ou seja, não possuem relação física entre si. A Figura (3) mostra esses forçamentos.

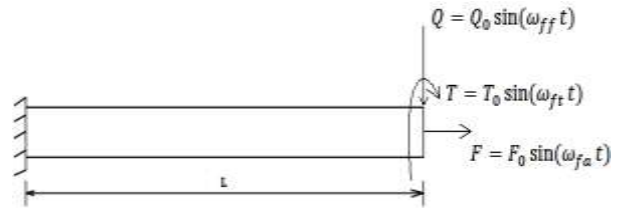


Figura 3. Forçamentos externos

## Equações governantes

O método dos elementos finitos propõe a solução do modelo através de uma álgebra matricial simplificada. Em função disso, todas as propriedades fundamentais de uma análise de vibração precisam ser formuladas matricialmente, tais como a massa, o amortecimento, a rigidez e o forçamento de cada elemento finito, formando assim, as matrizes locais do sistema contínuo. Posteriormente, as matrizes locais de cada propriedade são utilizadas para formar suas matrizes globais, que representam o sistema como um todo (Kelly, 2012).

A Equação (2) mostra a equação de movimento, pela segunda lei de Newton, para um sistema vibratório com  $n$  graus de liberdade.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

As matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são, respectivamente, as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez do sistema. Elas são compostas por matrizes locais de massa, amortecimento e rigidez de cada elemento finito. As matrizes locais são definidas para cada tipo de grau de liberdade (axial, angular e transversal), utilizando métodos de energia, conforme descrevem as Eq. (3), (4), (5), (6), (7) e (8).

$$[m]_{axial} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[k]_{axial} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[m]_{angular} = \frac{\rho J l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[k]_{angular} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[m]_{transv} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[k]_{transv} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde  $A, I$  e  $J$  são, respectivamente, a área, o momento de inércia de área e o momento polar de inércia, da

seção transversal e  $l$  o comprimento de cada elemento finito.

As matrizes globais são calculadas através de uma matriz de transformação  $[S]_i$  que é diferente para cada  $i$ -ésimo elemento do sistema, conforme mostram as Eq. (9), (10).

$$[M] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [m]_i [S]_i \quad (9)$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [k]_i [S]_i \quad (10)$$

O mesmo acontece com o vetor global de forçamento  $\{F(t)\}$ , como mostra a Eq. (11).

$$\{F(t)\} = \sum_{i=1}^n [S]_i^T \{f(t)\}_i [S]_i \quad (11)$$

A matriz global de amortecimento pode ser obtida considerando-se o conceito de amortecimento proporcional, como mostra a Eq. (12).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de proporcionalidade que, para o presente estudo, foram consideradas iguais a zero.

Dois informações muito importantes na análise de vibração são as frequências naturais e os modos normais do sistema. Quando um forçamento externo possui uma frequência muito próxima de uma das frequências naturais, o sistema pode entrar em ressonância, provocando grandes deformações (Meirovitch, 1986).

Dependendo da forma como o sistema vibre, suas partes podem, por exemplo, entrar em contato com outras peças, provocando interferência de montagem e mau funcionamento. As Equações (13) e (14) calculam as frequências naturais  $w_i$  e os modos normais de vibração  $\{X_i\}$ .

$$\{X_i\}(-w_i^2[M] + [K]) = 0 \quad (13)$$

$$\det(-w_i^2[M] + [K]) = 0 \quad (14)$$

Os vetores  $\{u(t)\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  e  $\{\ddot{u}\}$  são, respectivamente, o deslocamento, a velocidade e a aceleração de cada grau de liberdade do sistema. Cada elemento desses vetores está associado a um grau de liberdade de um determinado nó. Para o cálculo desses vetores, a Eq. (2) é reorganizada de tal forma que a equação matricial de segunda ordem se torne uma de primeira ordem, facilitando a solução numérica, conforme mostra a Eq. (15), onde  $\dot{u} = v$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \{F(t)\} \quad (15)$$

A Equação (15) tem tantas soluções quantos forem seus graus de liberdade. De posse delas, torna-se possível fazer uma análise de tensões nas seções transversais do tubo, levando em consideração o efeito de cada tipo de grau de liberdade separadamente ou em conjunto.

O grau de liberdade axial gera tensões normais devido à carga axial resultante. O grau de liberdade transversal gera tensões normais e de cisalhamento devido à flexão e à força cortante, respectivamente. Muitas vezes as tensões de cisalhamento são desprezadas quando o elemento estrutural avaliado possui um comprimento cerca de dez vezes maior do que a altura/diâmetro da sua seção transversal (Hibbeler, 2010). O grau de liberdade angular gera tensões de cisalhamento devido ao momento torçor resultante. As tensões podem ser obtidas, considerando as funções de forma do elemento ao longo do seu comprimento, segundo uma coordenada local  $x$ , e os deslocamentos dos seus respectivos nós,  $\{u(t)\}$ .

Para as tensões normais devido à flexão,  $\sigma_n^{flexão}(x, t)$  é definida pela Eq. (16).

$$\begin{aligned} \sigma_n^{flexão}(x, t) = \frac{E \cdot D_{ext}}{2} & \left[ \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) u(t)_1 \right. \\ & + \left( -\frac{4}{l} + 6\frac{x}{l^2} \right) u(t)_2 \\ & + \left( \frac{6}{l^2} - 12\frac{x}{l^3} \right) u(t)_3 \\ & \left. + \left( -\frac{2}{l} + 6\frac{x}{l^2} \right) u(t)_4 \right] \quad (16) \end{aligned}$$

Para as tensões normais devido à carga axial,  $\sigma_n^{axial}(x, t)$  é definida pela Eq. (17).

$$\sigma_n^{axial}(x, t) = -\frac{E}{l} [u(t)_2 - u(t)_1] \quad (17)$$

Para as tensões de cisalhamento devido à torção,  $\tau_c^{torção}(x, t)$  é definida pela Eq. (18).

$$\tau_c^{torção}(x, t) = -\frac{G \cdot D_{ext}}{2l} [u(t)_2 - u(t)_1] \quad (18)$$

As Equações (16), (17) e (18) mostram que somente a tensão normal devido à flexão é uma função da posição dentro de um mesmo elemento finito, além de todas variarem ao longo do tempo.

Para avaliar o efeito em conjunto das tensões, pode-se utilizar a equação de Von Mises (Hibbeler, 2010), definida pela Eq. (19).

$$\sigma_{Von\ Mises} = \sqrt{(\sigma_n^{flexão} + \sigma_n^{axial})^2 + 3(\tau_c^{torção})^2} \quad (19)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, as frequências naturais do tubo foram identificadas para cada tipo de solicitação, conforme listado na Tab. 2.

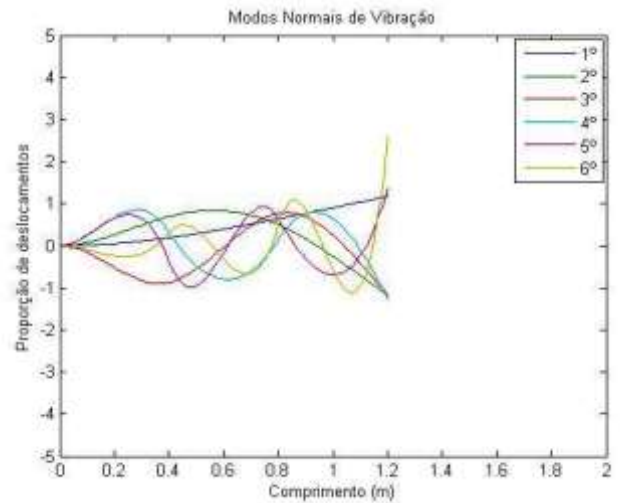
**Tabela 2.** Frequências naturais de vibração

Modos Normais	Frequências Naturais (Hz)	Tipo de solicitação
1°	70	flexão
2°	441	flexão
3°	631	torção
4°	1086	axial
5°	1245	flexão
6°	2065	flexão
7°	2804	torção
8°	3550	axial
9°	3745	flexão
10°	5276	flexão
11°	6441	torção
12°	10519	axial

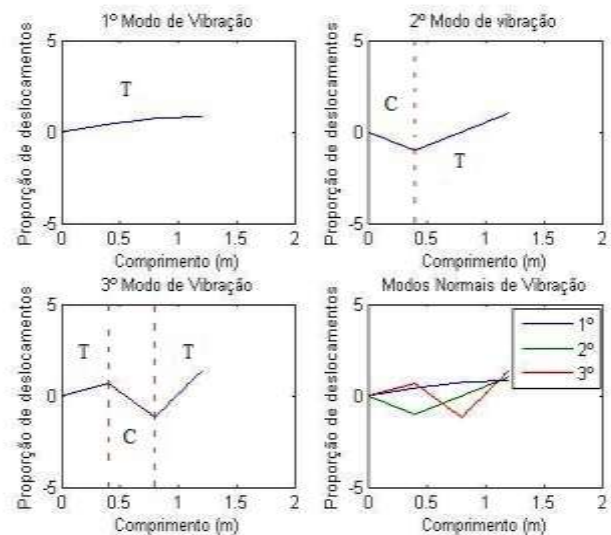
A Tabela 2 mostra que a menor frequência natural está associada ao primeiro modo normal de flexão e a maior está associada ao quarto e último modo normal de vibração axial. Isso se justifica, pois com os parâmetros do problema, a rigidez axial é muito maior do que as de flexão e torção, e a de torção muito menor do que as demais. Em geral, a rigidez axial é sempre maior do que as demais.

Outra observação importante é que as frequências de forçamento possuem valores distantes de todas as frequências naturais, evitando uma possível ressonância do tubo.

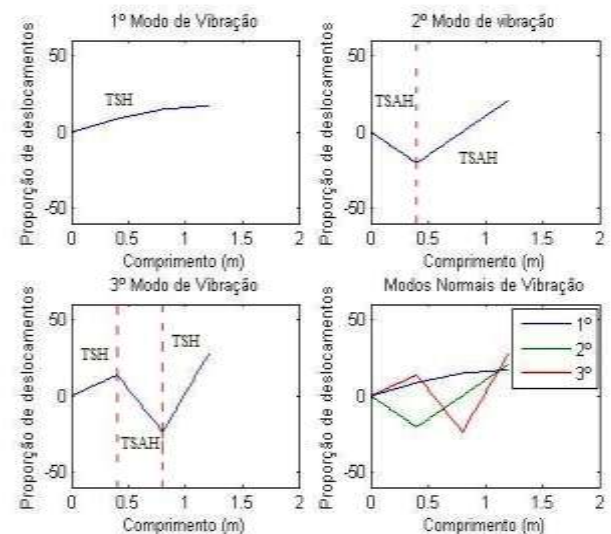
Em seguida, os modos normais de vibração foram calculados. Esses modos mostram as proporções dos deslocamentos relativos a cada nó dos elementos finitos. As Figuras (4), (5) e (6) mostram, respectivamente, os modos para a solicitação de flexão, axial e de torção, numerados em ordem crescente de aparição da Tab. 2, por exemplo: o 3° modo normal de flexão na Fig. (4) está associado com o 5° modo normal da Tab. 2.



**Figura 4.** Modos normais de flexão



**Figura 5.** Modos normais de vibração axial



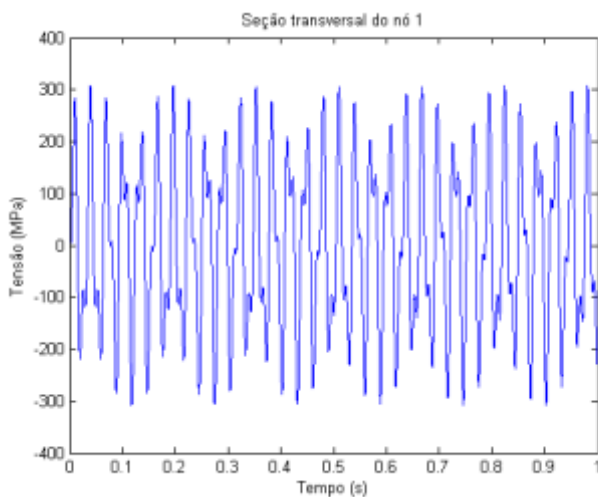
**Figura 6.** Modos normais de torção

A Figura (4) mostra que os possíveis modos normais de vibração transversal do tubo são completamente diferentes. O tubo tende a vibrar em um determinado modo de flexão quando possuir a frequência associada a ele.

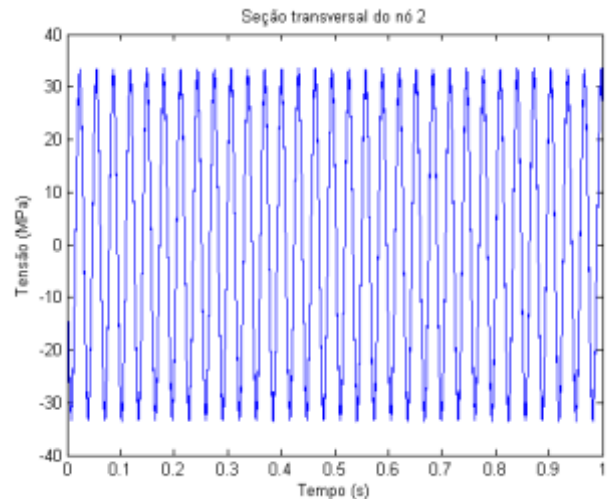
A Figura (5) mostra que dependendo do modo de vibração, alguns elementos do tubo podem estar sujeitas à compressão, C, e outros à tração, T. O 1º modo, por exemplo, faz com que todo o tubo esteja submetido à tração, o que já não acontece no 3º.

A Figura (6) mostra que, em função do modo de vibração do tubo, alguns elementos podem estar sendo torcidas em um sentido e outras noutro. O 1º modo, por exemplo, torce todos os elementos do tubo no sentido horário, TSH, enquanto que o 2º mostra dois elementos sendo torcidos no sentido horário e o outro no anti-horário, TSAH.

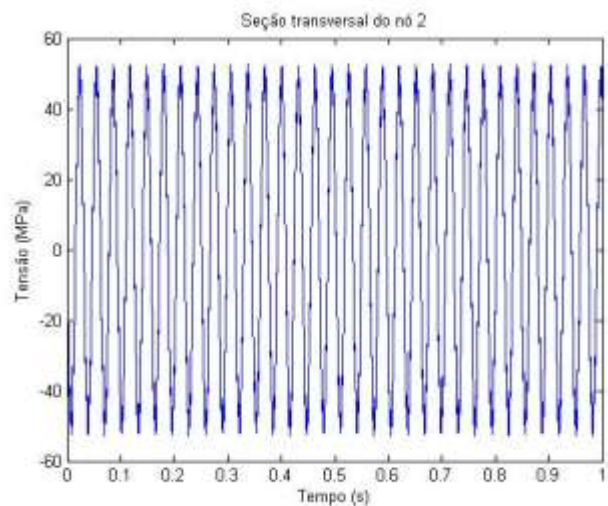
O estado de tensão foi obtido para cada forçamento externo associado a um determinado grau de liberdade dos nós, considerando o ponto crítico da seção crítica. Para o carregamento transversal, a seção crítica é a região engastada, onde se encontra o nó 1, e o ponto crítico está localizado a  $\frac{D_{ext}}{2}$  do eixo de rotação do momento fletor gerado pela força transversal. Para o carregamento axial e torçor, todas as seções estão submetidas a um carregamento constante, logo, não existe uma seção crítica específica. O ponto crítico para a torção é o mesmo definido para a flexão, e no caso axial, não existe um ponto crítico específico, uma vez que as tensões são iguais ao longo da seção transversal. As Figuras (7), (8) e (9) mostram, respectivamente, os estados de tensão obtidos para  $\sigma_n^{flexão}(x, t)$ ,  $\sigma_n^{axial}(x, t)$  e  $\tau_c^{torção}(x, t)$ .



**Figura 7.** Estado de tensão para carga transversal



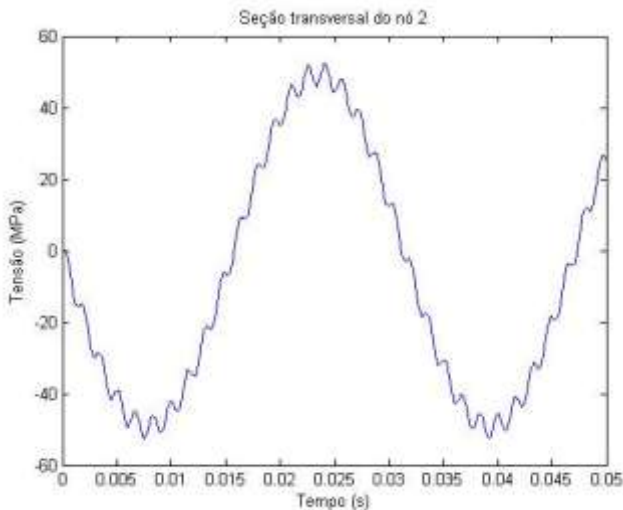
**Figura 8.** Estado de tensão para carga axial



**Figura 9.** Estado de tensão para carga de torção

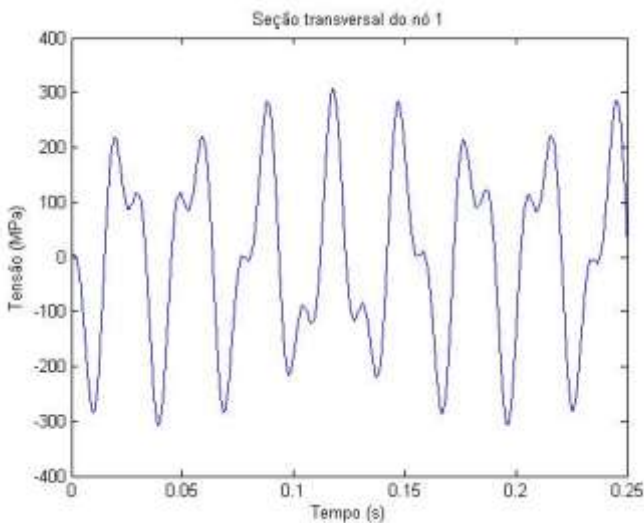
É possível notar que as tensões,  $\sigma_n^{axial}$  e  $\tau_c^{torção}$ , tem um comportamento de variação harmônica ao longo do tempo muito semelhante dos seus forçamentos,  $F(t)$  e  $T(t)$ . Se a Fig. (9) for ampliada, por exemplo, notar-se-á que existe uma pequena excitação dessa resposta harmônica, como mostra a Fig. (10).





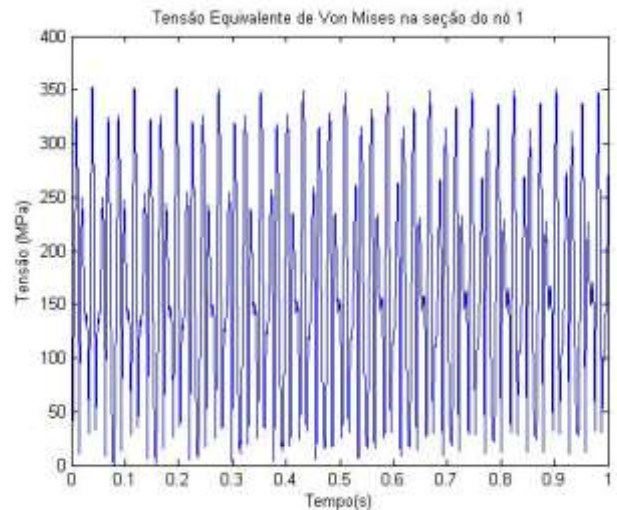
**Figura 10.** Ampliação da Fig. (8)

Esse tipo de comportamento pode estar associado aos efeitos dinâmicos do tubo, que não estão previstos em uma análise de resistência dos materiais clássica. Ele é mais evidente para a tensão  $\sigma_n^{flexão}$ , como mostra a Fig. (7). Nesta, pode-se observar um “grande harmônico”, excitado por “pequenos harmônicos”. A Figura (11) mostra uma ampliação da Fig. (7).



**Figura 11.** Ampliação da Fig. (7)

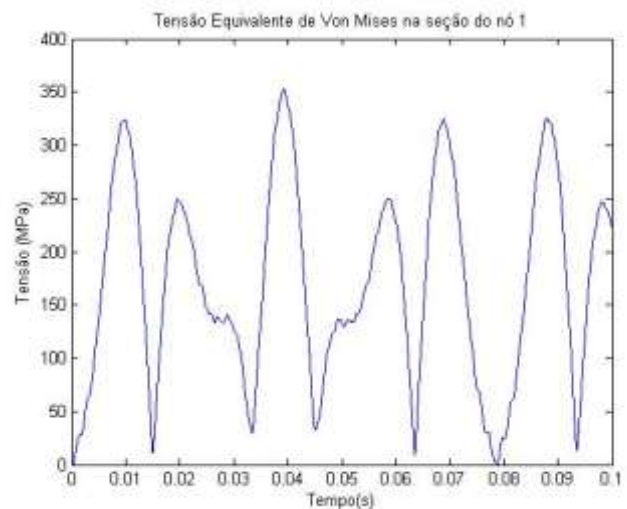
Uma das formas de avaliar o efeito das tensões combinadas é avaliar o estado crítico da tensão equivalente de Von Mises, utilizando a Eq. (19). A Figura (12) mostra o resultado obtido para  $\sigma_{Von Mises}(x, t)$ , na seção crítica engastada.



**Figura 12.** Estado de tensão equivalente de Von Mises

É possível notar através da Fig (12) que o estado de tensão equivalente de Von Mises, para a seção crítica engastada, tem um comportamento diferente dos demais.

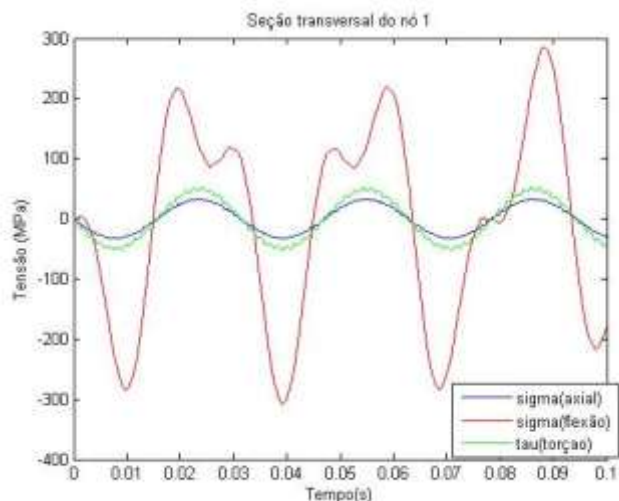
As tensões são sempre trativas e nunca compressivas, além de não haver uma uniformidade das tensões máximas e mínimas para um mesmo ciclo de tensão, como mostra a Fig. (13).



**Figura 13.** Ampliação da Fig. (12).

A Figura (14) mostra as três tensões em um único gráfico para que se possa visualizá-las atuando ao mesmo tempo na seção transversal crítica do tubo, a seção engastada.

Nota-se que a tensão devido à flexão é muito maior do que as outras. Além disso, as tensões encontram-se em fase, embora haja um trecho no qual  $\sigma_n^{flexão}(x, t)$  está crescendo/diminuindo enquanto as outras tensões estão diminuindo/crescendo.



**Figura 14.** Tensões superpostas.

Com os gráficos da Fig (14), torna-se imprescindível um estudo de fadiga estrutural nesse ponto crítico da seção engastada do tubo, uma vez que as tensões variam ao longo do tempo.

O estudo de fadiga multiaxial se aplica nesse caso, uma vez que tensões de naturezas distintas, normais e de cisalhamento, atuam nas seções transversais do tubo.

## CONCLUSÃO

Com o presente estudo, pode-se concluir que os estados de tensão gerados por forçamentos de natureza harmônica não possuem perfis harmônicos, apesar de serem periódicos. Isso pode estar associado à inércia do tubo que é levada em consideração nas análises dinâmicas de vibração. Esse comportamento é mais evidente nas tensões de flexão devido ao forçamento transversal.

Os estados de tensão obtidos nas análises mostram que um estudo de fadiga multiaxial no ponto crítico da seção mais solicitada é de fundamental importância para o projeto do tubo. Isso porque as tensões variam ao longo do tempo, facilitando a formação de uma trinca nesse ponto.

## REFERÊNCIAS

- Meriam, J. L., Kraige, L. G., 2009, “Estática”, 6ª ed., LTC.
- Rao, Singiresu S., 2008, “Vibrações Mecânicas”, 4ª ed., Pearson Prentice Hall.
- Kelly, S.G., 2012, “Mechanical Vibrations – Theory and applications”, 1ª ed., Cengage Learning.
- Meirovitch, L., 1986, “Elements of Vibration Analysis”, 2ª ed., McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. C., 2010, “Resistência dos Materiais”, 5ª ed., Pearson Prentice Hall.

## DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo artigo apresentado.